Schlink

Discussion der Curve

$$a^3(x+y)+xy(x^2+y^2)=a^4.$$

INAUGURAL-DISSERTATION

der philosophischen Facultät zu Jena

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

CLEMENS SCHLINK.

Jena 1867.

Druck von W. Ratz.

Die Curve, deren Gleichung $a^3(x+y) + xy(x^2+y^2)=a^4$, ist eine solche vierter Ordnung; denn da x und y Linien sind, so muss auch a eine Linie sein, es kommt also überall die vierte Dimension vor. Die Gleichung ist nach x und y symetrisch, es gelten also alle Werthe von x auch für y und umgekehrt. Setzt man in der obigen Gleichung $a=o$, so wird daraus: $xy(x^2+y^2)=o$, oder $x^2+y^2=o$.

Dies ist die Gleichung des Anfangspunktes, da sowohl $x=o$, als auch $y=o$ ist. Setzt man $a>o$, so kann man die Gleichung nach y auflösen. Es ist nämlich:

$$a^3x+a^3y+x^3y+xy^3-a^4=o$$

$$y^3x+(a^3+x^3)y+a^3x-a^4=o$$

$$y^3+\frac{a^3+x^3}{x}y+\frac{a^3x-a^4}{x}=o$$

Da jede Gleichung dritten Grades wenigstens eine reelle Wurzel hat, so schneidet jede der y-Achse parallele Linie die Curve wenigstens in einem Punkte. Unsere Gleichung hat aber eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; denn nimmt man das fehlende Glied oy^2 positiv an, so hat die Gleichung drei Folgen der Zeichen; nimmt man es negativ an, so hat sie zwei Abwechselungen und eine Folge. In beiden Fällen treten imaginäre Wurzeln auf und da diese nur paarweise vorkommen, so enthält die Gleichung eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Löst man die Gleichung auf, so ist:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{a^3x-a^4}{2x}+\sqrt{\tfrac{1}{4}\left(\frac{a^3x-a^4}{2x}\right)^2+\tfrac{1}{27}\left(\frac{a^3+x^3}{x}\right)^3}}$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{a^3x-a^4}{2x}-\sqrt{\tfrac{1}{4}\left(\frac{a^3x-a^4}{2x}\right)^2+\tfrac{1}{27}\left(\frac{a^3+x^3}{x}\right)^3}}.$$

Durch Einsetzen von numerischen Werthen für x in diese Gleichung kann man, wenn man für a einen bestimmten Werth z. B. $a=1$ annimmt, Werthe von y berechnen und so die Curve construiren. Setzt man in der Gleichung der Curve $x=o$, so ist: $a^3y=a^4$, also $y=a$, d. h. die Curve schneidet die y-Achse in der Entfernung a vom Anfangspunkte. Da die Gleichung symetrisch ist, so ist für $y=o$ auch: $x=a$, d. h. die Curve schneidet die x-Achse in der Entfernung a vom Anfangspunkte.

Setzt man $x=y$, so wird die Gleichung: $2a^3x+2x^4=a^4$, oder $a=1$ gesetzt: $x^4+x=\frac{1}{2}$.

Dieser Gleichung genügen die beiden Werthe $x=0{,}457$ und $x=-1{,}129$.

Die Curve schneidet also eine Linie, welche den I. und III. Quadranten des als rechtwinklig angenommenen Coordinatensystems halbirt, in der Entfernung $0{,}457 \cdot \sqrt{2}$ und $1{,}129 \cdot \sqrt{2}$ oder 0,646 und 1,596 vom Anfangspunkte.

Construction der Curve.

Die Gleichung der Curve ist:

$$a^3x+a^3y+x^3y+xy^3=a^4 \quad \text{oder:}$$

$$y^3+\frac{a^3+x^3}{x}\cdot y=\frac{a^4-a^3x}{x}$$

$$y^3+\frac{a^3+x^3}{x}y=(a^2-ax)\cdot\frac{a^2}{x}.$$

Nimmt man nun ein bestimmtes x an, welches positiv und kleiner als a sein möge, damit das Absolutglied $(a^2-ax)\cdot\frac{a^2}{x}$ nicht negativ werde, so kann man durch Einführung einer neuen Variablen ξ die Gleichung in zwei Gleichungen zweiten Grades zerlegen, welche Kegelschnitten angehören. Diese Gleichungen sind:

$$\text{I.}\quad y^2+\frac{a^3+x^3}{x}=\frac{a^2}{x}\cdot\xi$$

$$\text{II.}\quad \xi y=a^2-ax.$$

Denn bestimmt man aus Gleichung II $\xi=\frac{a^2-ax}{y}$ und setzt dies in Gleichung I, so bekommt man wieder die ursprüngliche Gleichung. Formt man Gleichung I um, so ist:

$$y^2+\frac{a^3}{x}+x^2=\frac{a^2}{x}\cdot\xi$$

$$y^2+c^2+x^2=e\cdot\xi,$$

wenn $c^2=\frac{a^3}{x}$ und $e=\frac{a^2}{x}$ gemacht wird; ist ferner noch $c^2+x^2=d^2$, so heisst nun die Gleichung: $\quad y^2+d^2=e\cdot\xi$ oder $y^2=e\cdot\xi-d^2$.

Diese Gleichung gehört einer Parabel an, deren Scheitelpunkt vom Anfangspunkte um $\frac{d^2}{e}$ entfernt ist, denn setzt man $y=0$, so ist: $\xi=\frac{d^2}{e}$.

Die Gleichung II gehört einer Hyperbel an, bezogen auf die Asymptoten als Coordinaten-Achsen, denn $\xi y=a^2-ax=a(a-x)$ oder $\xi y=b^2$.

Da diese beiden Gleichungen vereinigt uns die ursprüngliche Gleichung wieder geben, so erhält man, wenn man für ein bestimmtes x die beiden Kegelschnitte construirt, durch den Durchschnittspunkt derselben einen Punkt der Curve.

Es sei nun (Taf. III, Fig. 1) $OB=x$ und $AB=a$; nun ist $c^2=\frac{a^3}{x}$, also $x:a=a^2:c^2$ oder $ax:a^2=a^2:c^2$. Beschreibt man nun über AB einen Kreis, der die y-Achse in F schneidet und zieht BF, so ist $ax=BF$, also $BF:a=a:c$.

Man errichte also in A auf AB eine Senkrechte und verlängere BF, bis sie die Senkrechte in C trifft, so ist $BC=c$, also $BC^2=\frac{a^3}{x}$. Errichtet man ferner in B auf AB eine Senkrechte und macht $BD=BC$ und zieht OD, so ist $OD^2=OB^2+BD^2$ oder

$OD^2=\frac{a^3}{x}+x^2=c^2+x^2=d^2$.

Um $e=\frac{a^2}{x}$ zu finden, setze man $e=\frac{a^3/x}{a}=\frac{c^2}{a}$; man errichte also in C auf BC eine Senkrechte, welche die x-Achse im Punkte E schneidet, so ist $BE=e$. Um nun die Parabel $y^2=e\xi-d^2$ zu construiren, kann man den Anfangspunkt des Coordinatensystems von O nach B verlegen.

Setzt man $y=o$, so ist $\xi=\frac{d^2}{e}$; man ziehe also ED und errichte in D auf ED eine Senkrechte, welche die x-Achse im Punkte M schneidet, dann ist M der Anfangspunkt der Parabel. Verbindet man ferner den Punkt E mit beliebigen Punkten auf der Verlängerung von BD z. B. N', N'', N''', N'''' u. s. w., errichtet in den Punkten N', N''... Senkrechte, welche die x-Achse in M', M'', M'''... schneiden, so sind $(BN')^2$, $(BN'')^2$, $(BN''')^2$... jedesmal $=e\xi'$, $e\xi''$, $e\xi'''$... Da aber $y=e\xi-d^2$, so mache man $BG=BD$ und beschreibe aus G mit BN', BN'', BN'''... Kreise, welche die BD in den Punkten P', P''. P'''... schneiden, so ist $BP'=y'$, $BP''=y''$, $BP'''=y'''$... Trägt man diese Längen auf den in den Punkten M', M'', M'''... errichteten Senkrechten ab, so sind Q', Q'', Q'''... Punkte der Parabel, welche man durch einen freien Zug verbinden kann.

Die Gleichung der Hyperbel war $\xi y=b^2$, wo $b^2=a(a-x)$. Man findet b, wenn man A mit F verbindet, also ist: $\xi y=AF^2$.

Trägt man nun von B aus sowohl auf der x-Achse als auf der y-Achse die Längen $\frac{AF}{3}$, $\frac{AF}{2}$, AF, 2AF, 3AF... ab und construirt die Punkte, welche einem $\xi=\frac{AF}{3}$, $y=3AF$, $\xi=\frac{AF}{2}$, $y=2AF$... entsprechen, so erhält man Punkte der Hyperbel. Die beiden Curven durchschneiden sich im Punkte R, also ist RL als Ordinate des Durchschnittspunktes der Parabel und Hyperbel auch Ordinate der Curve für $x=OB$. Trägt man RL von B aus auf BD ab, so ist S ein Punkt der Curve. Für den Fall, dass $x>o$ und $<a$ ist, erhalten wir Punkte der Curve, welche im I. Quadranten liegen.

Es sei nun $x>o$ und $>a$. Die Gleichung der Curve war:

$$y^3+\frac{a^3+x^3}{x}y=(a^2-ax)\frac{a^2}{x}$$

Ist nun $x>a$, so wird $ax>a^2$, wir kehren also die Zeichen der Gleichung um und erhalten:

$$-y^3-\frac{a^3+x^3}{x}y=(ax-a^2)\frac{a^2}{x}.$$

Zerlegt man diese Gleichung in zwei zweiten Grades, so ist:

$$y^2+\frac{a^3+x^3}{x}y=\frac{a^2}{x}.\xi$$

$$-\xi y=ax-a^2.$$

Die erste Gleichung ist die einer Parabel, die zweite die einer Hyperbel, gelegen im II. und IV. Quadranten. Die Construction ist dieselbe und gibt uns Punkte der Curve im IV. Quadranten.

Es sei $x<o$. Dann wird die Gleichung der Curve:

$$y^3-\frac{a^3-x^3}{x}y=-(a^2+ax)\frac{a^2}{x}.$$

Durch Zerlegung bekommt man die beiden Gleichungen:

$$y^2-\frac{a^3-x^3}{x}=-\frac{a^2}{x}.\xi$$

$$\xi y=a^2+ax.$$

Die erste Gleichung gehört einer Parabel an, deren Achse mit der negativen Seite der x-Achse zusammenfällt und deren Scheitelpunkt vom Anfangspunkte $\frac{d^2}{e}$ entfernt ist. Die zweite Gleichung ist die einer Hyperbel, gelegen im I. und III. Quadranten. Die Construction gibt uns also Punkte, welche im III. Quadranten liegen.

Construirt man auf diese Weise die Curve, oder, indem man in der Gleichung von y numerische Werthe von x einsetzt, so erscheint sie unter der Form Taf. I.

Bestimmung der Asymptoten.

Die Gleichung der Curve ist:

$$a^3x+a^3y+x^3y+xy^3-a^4=o.$$

Die Gleichung der Asymptote habe die Form $y=kx+l$, dann wird der Zweig der Curve die Gleichung haben $y=kx+l+V$, wo V eine Function von x ist, welche mit wachsendem x gegen o convergirt. Dann ist:

$$k=\lim\frac{y}{x} \text{ und } l=\lim(y-kx).$$

Wir stellen die Gleichung der Curve unter folgender Form dar:

$$x^4\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{y}{x}\right)+x.\left(a^3\frac{y}{x}\right)+a^3x-a^4=0.$$

Setzt man hierin $\frac{y}{x}=p$, also $y=px$, so findet man k, wenn man die Grenze von p für $x=\infty$ nimmt. Substituirt man p, so ist:

$$x^4(p^3+p)+x\,a^3p+a^3x-a^4=0$$

$$(p^3+p).+\frac{1}{x^3}.a^3p+\frac{a^3}{x^3}-\frac{a^4}{x^4}=0.$$

Geht man nun zur Grenze über, indem man $x=\infty$ werden lässt, so wird $p^3+p=F(k)=0$, also $k=0$, d. h. der Richtungscoefficient der Asymptote ist $=0$ oder die Asymptote ist parallel der x-Achse. Um l zu finden, setzt man $y=kx+t$, also $\frac{y}{x}=k+\frac{t}{x}$. Die Gleichung der Curve wird dann:

$$x^4\left[(k+\frac{t}{x})^3+(k+\frac{t}{x})\right]+x\left[a^3.(k+\frac{t}{x})\right]+a^3x-a^4=0, \text{ also:}$$

$$x^4.F(k+\frac{t}{x})+x.f(k+\frac{t}{x})+a^3x-a^4=0,$$

da aber $F(k)=0$ ist, so ist:

$$F(k+\frac{t}{x})=\frac{t}{x}F'(k+\vartheta.\frac{t}{x}), \text{ also:}$$

$$x^3.t.F'(k+\vartheta\frac{t}{x})+x.f(k+\frac{t}{x})+a^3x-a^4=0$$

$$t.F'(k+\vartheta\frac{t}{x})+\frac{1}{x^2}.f(k+\frac{t}{x})+\frac{a^3}{x^2}-\frac{a^4}{x^3}=0.$$

Geht man nun zur Grenze von t über, da $l=\lim t$, so ist für $x=\infty$ $l=0$, also die Asymptote $y=0$ d.h. die x-Achse. Da die Gleichung aber symetrisch ist, so ist die zweite Asymptote die y-Achse.

Maxima und Minima der Curve.

Die Gleichung der Curve ist:

$$a^3x+a^3y+xy^3+x^3y-a^4=0.$$

Soll ein Maximum oder Minimum stattfinden, so muss der erste Differentialquotient verschwinden; das Zeichen des zweiten Differentialquotienten entscheidet dann, ob ein Maximum oder Minimum eintritt. Nun ist:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a^3+3x^2y+y^3}{a^3+3xy^2+x^3}$$

Dieser Ausdruck wird $=0$, wenn der Zähler $=0$ ist, oder wenn $y^3+3x^2y+a^3=0$ ist.

Löst man diese Gleichung nach der Cardinischen Formel auf, so ist:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}+\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung der Curve ein, so ist:

$$a^3x+(a^3+x^3)\left(\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}+\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}\right)$$

$$+x.\left(\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}+\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}\right)^3-a^4=0$$

$$a^3x+(a^3+x^3)\left(\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}+\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}\right)$$

$$+x\left[-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}+3\sqrt[3]{\left(\frac{a^6}{4}-a^3\sqrt{(\frac{a^6}{4}+x^6)}+\frac{a^6}{4}+x^6\right)\left(-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}\right)}\right.$$

$$\left.+3\sqrt[3]{\left(-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}\right)\left(\frac{a^6}{4}+a^3\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}+\frac{a^6}{4}+x^6\right)}-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}\right]-a^4=0$$

$$a^3x+(a^3+x^3)\left(\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}+\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}\right)+x\left[-a^3\right.$$

$$\left.+3\sqrt[3]{\frac{a^3x^6}{2}-x^6\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}+3\sqrt[3]{\frac{a^3x^6}{2}+x^6\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}\right]-a^4=0$$

$$(a^3+x^3)\left(\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}+\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}\right)$$

$$-3x^3\left(\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}+\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}+\sqrt[3]{-\frac{a^3}{2}-\sqrt{\frac{a^6}{4}+x^6}}\right)-a^4=0$$

oder
$$(a^3+x^3)\,y-3x^3y-a^4=0$$

also
$$y=\frac{a^4}{a^3-2x^3}.$$

Setzt man diesen einfacheren Werth von y in die Gleichung der Curve, so ist:

$$a^3x+(a^3+x^3)\frac{a^4}{a^3-2x^3}+\frac{a^{12}x}{(a^3-2x^3)^3}-a^4=0$$

$$ax^3.(a^9-6a^6x^3+12a^3x^6-8x^9)+(a^3+x^3)(a^6-4a^3x^3+4x^6).a^4+a^{12}x-a^4(a^9-6a^6x^3+12a^3x^6-8x^9)=0$$

$$a^{12}x-6a^9x^4+12a^6x^7-8a^3x^{10}+a^{13}-4a^{10}x^3+4a^7x^6+a^{10}x^3-4a^7x^6+4a^4x^9+a^{12}x-a^{13}+6a^{10}x^3$$
$$-12a^7x^6+8a^4x^9=0$$

$$2a^{12}x - 3a^{10}x^3 - 6a^9x4 - 12a^7x^6 + 12a^6x^7 + 12a^4x^9 - 8a^3x^{10} = 0.$$

Durch a^3x dividirt und nach Potenzen von x geordnet:

$$8x^9 - 12ax^8 - 12a^3x^6 + 12a^4x^5 + 6a^6x^3 - 3a^7x^2 - 2a^9 = 0.$$

Um die Gleichung aufzulösen, setze man $a = 1$, dann ist:

$$8x^9 - 12x^8 \pm 0x^7 - 12x^6 + 12x^5 \pm 0x^4 + 6x^3 - 3x^2 \pm 0x - 2 = 0.$$

(Ueber die Methode der Auflösung s. Klügel, mathem. Wörterbuch, Art. ‚Gleichung' und Kramp, *Elémens d'arithmétique universelle, Cologne* 1808.)

Wir bezeichnen die Coefficienten der Gleichung von unten angefangen mit $A = -2$, $B = 0$, $C = -3$, $D = 6$, $E = 0$, $F = 12$, $G = -12$, $H = 0$, $I = -12$, $K = 8$. Setzt man nun nach einander für x die Glieder der arithmetischen Progression 0, 1, 2, 3..., so bilden die Werthe der Gleichung eine Reihe der 9ten Ordnung, deren 9te Differenzen erst beständig werden.

Sind die ersten Glieder der Differenzen-Reihe a, b, c...k, so ist:

$A = -2$,	also $a = A$	$= -2$
$B = 0$,	„ $b = 1.(B + C + D + E + F + G + H + I + K)$	$= -1$
$C = -3$,	„ $c = 1.2.(C + 3D + 7E + 15F + 31G + 63H + 127I + 255K)$	$= 294$
$D = 6$	„ $d = 3!(D + 6E + 25F + 90G + 301H + 966I + 3025K)$	$= 71004$
$E = 0$	„ $e = 4!(E + 10F + 65G + 350H + 1701I + 7770K)$	$= 986112$
$F = 12$	„ $f = 5!(F + 15G + 140H + 1050I + 6950K)$	$= 5149840$
$G = -12$	„ $g = 6!(G + 21H + 266I + 2646K)$	$= 12934080$
$H = 0$,	„ $h = 7!(H + 28I + 62K)$	$= 16934400$
$I = -12$,	„ $i = 8!(I + 36K)$	$= 11128320$
$K = 8$,	„ $k = 9!K$	$= 2903040.$

Bildet man nun die Differenzen-Reihen, so ist:

	Diff. 9.	Diff. 8.	Diff. 7.	Diff. 6.	Diff. 5.	Diff. 4.	Diff. 3.	Diff. 2.	Diff. 1.	Hauptr.
$x = 0 =$	2903040 +	11128320 +	16934400 +	12934080 +	5149840 +	986112 +	71004 +	294 +	−1	−2
$x = 1 =$	2903040 +	14031360 +	28062720 +	29868480 +	18083920 +	6135952 +	1057116 +	71298 +	293	−3
$x = 2 =$	2903040 +	16934400 +	42094080 +	57931200 +	47952400 +	24219872 +	7193068 +	1128414 +	71591 +	290

Die positive Wurzel der Gleichung liegt also zwischen 1 und 2, da die Werthe der Gleichung für die Substitution $x = 1$ und $x = 2$ verschiedene Zeichen geben. Ueber 2 hinaus kann keine Wurzel mehr liegen, da die Werthe der Hauptreihe jenseits 290 immer grösser werden. Um die negativen Wurzeln zu finden, setzt man $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$... und lässt durch Subtraction der Glieder die Differenzenreihe rückwärts fortschreiten. Es ist also:

	Diff. 9.	Diff. 8.	Diff. 7.	Diff. 6.	Diff. 5.	Diff. 4.	Diff. 3.	Diff. 2.	Diff. 1.	Hauptreihe.
x= 0 =	2903040	+11128320	+16934400	+12934080	+5149840	+986112	+71004	+ 294	—1	—2
x=—1=	2903040	+ 8225280	+ 8709120	+ 4224960	+ 924880	+ 61232	+ 9772	— 9478	+ 9477	—9479
x=—2=	2903040	+53322240	+3386880	+ 838080	+ 86800	— 25568	+35340	— 44818	+54295	—63774
x=—3=	2903040	+ 2419200	+ 965680	— 127600	+	—	+	—	+	—
x=—4=	2903040	— 483840	+	—	+	—	+	—	+	—

Da in der letzten horizontalen Reihe die Zeichen regelmässig mit einander abwechseln, so kann in den Gliedern der Hauptreihe keine Veränderung der Zeichen mehr vorkommen. Die Gleichung enthält also keine negative Wurzeln, sondern nur eine positive reelle Wurzel zwischen 1 und 2; die übrigen sind sämmtlich imaginär. Um die Wurzel näher zu begrenzen, setze man, da sie zwischen 1 und 2 liegt, $x=1+y$; dann verwandelt sich die obige Gleichung in folgende:

$$8y^9+60y^8+192y^7+324y^6+278y^5+48y^4-114y^3-93y^2-24y-3=0.$$

Da aber $y<1$ ist, so setze man $y=\frac{z}{10}$, wodurch aus der obigen Gleichung folgende entsteht:

$$8z^9+600z^8+19200z^7+324000z^6+2780000z^5+4800000z^4-114000000z^3-930000000z^2$$
$$-2400000000z-3000000000=0.$$

Verfährt man nun wieder wie oben und bildet die Differenzenreihen und substituirt für z die Werthe 1, 2, 3..., so findet man eine Wurzel der Gleichung zwischen $z=6$ und $z=7$ und die Wurzel der ursprünglichen Gleichung liegt also zwischen 1,6 und 1,7. Auf diesem Wege kann man beliebig viele Decimalstellen berechnen und man findet $x=1,686...$

Die zweite Ableitung ist nun:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dy}}=-\frac{6xy}{a^3+3xy^2+x^3}$$

Setzt man nun den Werth von x in die Gleichung von y, nachdem $a=1$ gesetzt ist:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{x-1}{2x}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2+\left(\frac{x^3+1}{3x}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{x-1}{2x}-\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2+\left(\frac{x^3+1}{3x}\right)^3}}$$

so findet man $y=-0,1144$.

Diesen Werth setzen wir in die zweite Ableitung, dann ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{-6.0,1144.x}{a^3+3.(0,1144)^2x+x^3}$$

Diese wird positiv und folglich findet bei $x=1,686..$ ein Minimum statt.

Convexität, Concavität und Wendepunkte der Curve.

Die Gleichung der Curve ist:

$$a^3(x+y)+xy(x^2+y^2)-a^4=0 \text{; also}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a^3+3x^2y+y^3}{a^3+3xy^2+x^3} \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{6xy\,[(a^3+3xy^2+x^3)^2+(a^3+3x^2y+y^3)^2]-(6x^2+y^2)(a^3+3xy^2+x^3)(a^3+3xy^2+y^3)}{(a^3+3xy^2+x^3)^3}$$

Soll nun ein Wendepunkt stattfinden, so muss $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ sein oder für $a=1$ muss:

$xy\,[(1+3xy^2+x^3)^2+(1+3xy^2+y^3)^2]-(x^2+y^2)(1+3xy^2+x^3)(1+3x^2y+y^3)=0$ sein.

Wollte man hierin für y seinen Werth aus der Cardinischen Formel einführen, so würde dies zu grossen Weitläufigkeiten führen. Wir wollen deshalb durch Einsetzen numerischer Werthe den Wendepunkt zu bestimmen suchen.

Für $x=1$ ist $y=0$, also $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{-12}{8}=\frac{3}{2}$, also ist die Curve convex.

Für $x>1$ sind die Werthe von y negativ; da nun im Nenner nur y^2 vorkommt, so ist derselbe für alle positiven Werthe von x positiv; es kommt also nur auf den Zähler an.

Für $x=2$ ist $y=-0{,}111$. Diese Werthe eingesetzt, findet man den obigen Ausdruck $=-18{,}286+1{,}24$, also <0, also $\frac{d^2y}{dx^2}>0$; die Curve ist also für $x=2$ convex.

Für $x=3$ ist $y=-0{,}071$. Diese Werthe eingesetzt, findet man $-17{,}40+74{,}12$, also >0 und $\frac{d^2y}{dx^2}<0$; für $x=3$ ist also die Curve concav. Es liegt also ein Wendepunkt zwischen $x=2$ und $x=3$; die nähere Bestimmung desselben wird später folgen.

Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Curve.

Die Gleichung der Tangente an einer Curve ist:

$$y-y'=\frac{dy}{dx}(x-x') \text{, wo}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} \text{, oder es ist } (y-y')\frac{df}{dy}+(x-x')\cdot\frac{df}{dx}=0.$$

Nun ist: $\frac{dy}{dx}=-\frac{a^3+3x^2y+y^3}{a^3+3xy^2+x^3}$, also ist die Gleichung der Tangente an die Curve:

$$(y-y')(a^3+3xy^2+x^3)+(x-x')(a^3+3xy^2+y^3)=0,$$

also für einen bestimmten Punkt $(x_, y_,)$:

$$(y-y_,)(a^3+3x_,y_,^2+x_,^3)+(x-x_,)(a^3+3x_,^2y_,+y_,^3)=0$$

$$y=-\frac{a^3+3x_,^2y_,+y_,^3}{a^3+3x_,y_,^2+x_,^3}x+y_,+\frac{a^3+3x_,^2y_,+y_,^3}{a^3+3x_,y_,^2+x_,^3}\cdot x_,.$$

Der Richtungscoefficient der Tangente ist also:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a^3+3x_,^2y_,+y_,^3}{a^3+3x_,y_,^2+x_,^3}$$

und das Absolutglied oder das Stück, welches auf der y-Achse abgeschnitten wird:

$$y_,+\frac{a^3+3x_,^2y_,+y_,^3}{a^3+3x_,y_,^2+x_,^3}\cdot x_,$$

Um den Richtungscoefficienten zu construiren, setze man:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\frac{a^3}{x_,^2}+3y_,+\frac{y_,^3}{x_,^2}}{\frac{a^3}{x_,^2}+\frac{3y_,^2}{x_,^2}+x_,}.$$

Ist nun (Taf. 3, Fig. 2) P ein Punkt der Curve, also OA=x und AP=y und OB=a, so ist, wenn BC ⊥ AB und CD ⊥ BC steht, $OD=\frac{a^3}{x_,^2}$ und OE=3AP=3y, und wenn HF ⊥ AF und HG ⊥ FH steht, $OG=\frac{y_,^3}{x_,^2}$.

Nun mache man EL=OD+OG um AM=OD+3.OG, ziehe LM, dann ist $\frac{LO}{OM}$ gleich dem Richtungscoefficienten. Zieht man nun durch P eine Parallele zu LM, so ist diese Tangente an die Curve, denn das Absolutglied ist $OQ=FQ+FO=\frac{QF}{FP}.x_,+y_,=\frac{LO}{OM}x_,+y.$

Ist $x_,=a$, so ist $y_,=0$, also ist dann $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{a^3}{a^2}}{\frac{a^3}{a^2}+a}=-\frac{1}{2}$. Man trage also, um die Tangente für diesen Punkt zu construiren, auf der y-Achse $\frac{a}{2}$ ab und verbinde den Punkt mit $P(x_,=a)$.

Für den $P(x_,=y_,)$, also für den Punkt der Curve, welcher auf der Halbirungslinie des I. und III. Quadranten liegt, ist $\frac{dy}{dx}=-\frac{a^3+4x_,^3}{a^3+4x_,^3}=-1.$

Der Richtungscoefficient ist $=-1$, d. h. die Tangente steht senkrecht auf der Halbirungslinie des I. und III. Quadranten. Das Absolutglied ist dann: $\frac{a^3+4x_,^3}{a^3+4x_,^3}\cdot x_,+x_,=2x_,$

Man braucht also nur auf der x-Achse und y-Achse das Stück $2x_,$ abzutragen und die beiden Punkte zu verbinden, so ist diese Linie Tangente für den Punkt $(x_,=y_,)$.

Für das Minimum $x=1{,}686$ ist die Tangente parallel der x-Achse.

Um die Länge der Subnormale Sn, der Subtangente St, der Normale N und der Tangente T zu bestimmen, setze man in die Formeln:

$$Sn=-y'.\frac{\frac{d\varphi}{dx'}}{\frac{d\varphi}{dy'}}=-y'.\frac{dy'}{dx'};\quad St=-y'.\frac{dx'}{dy'};\quad T=y'\sqrt{1+\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2}\text{ und }N=y'.\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}$$

den Werth von $\frac{dy'}{dx'}$ ein, so ist: $Sn=y_,.\frac{a^3+3x_,^2y_,+y_,^3}{a^3+3x_,y_,^2+x_,^3}$, also das Stück:

$$AS,\text{ da }y_,.\frac{OL}{OM}=y_,.\frac{AP}{AR}=\frac{y_,^2}{AR}=AS.$$

$$St=y_,.\frac{a^3+3x_,y_,^2+x_,^3}{a^3+3x_,^2y_,+y_,^3}=y_,.\frac{AR}{AP}=AR;$$

$$T=\sqrt{y_,^2+\left(y_,.\frac{dx_,}{dy_,}\right)^2}=\sqrt{y_,^2+St^2}=\sqrt{PA^2+AR^2}=PR;\text{ oder}$$

$$T=\sqrt{y_,^2+y_,^2.\left(\frac{a^3+3x_,y_,^2+x_,^3}{a^3+3x_,^2y_,+y_,^3}\right)^2};\quad N=OP=\sqrt{y_,^2+y_,^2\left(\frac{a^3+3x_,^2y_,+y_,^3}{a^3+3x_,y_,^2+x_,^3}\right)^2}.$$

Die Construction der Tangente für den negativen Curvenzweig ist dieselbe.

Bezieht man die Curve auf Polarcoordinaten, dann ist: $x=r.\cos\varphi$ und $y=r.\sin\varphi$.

Aus der Gleichung der Curve: $a^3(x+y)+xy(x^2+y^2)=a^4$ wird also:

$$a^3r.(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{r^4}{2}.\sin 2\varphi=a^4\qquad a^3r.\cos(\tfrac{1}{2}R-\varphi).\sqrt{2}+\frac{r^4}{2}.\sin 2\varphi=a^4.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}R-\varphi=v$, so ist: $\varphi=\frac{1}{2}R-v$, also $2\varphi=R-2.v$ und $\sin 2\varphi=\cos 2.v$, also $a^3r.\cos v.\sqrt{2}+\frac{r^4}{2}.\cos 2v-a^4=o$; aber $\cos 2v=2.\cos^2v-1$, folglich:

$$a^3\sqrt{2}.r.\cos v+r.^4\cos^2v-\frac{r^4}{2}-a^4=o\qquad r.^4\cos^2v+a^3\sqrt{2}.r.\cos v-\frac{r^4}{2}-a^4=o.$$

Nun ist: $\frac{dr}{dv}=-\frac{\frac{df}{dv}}{\frac{df}{dr}}=-\frac{-2r^4\cos v.\sin v-a^3\sqrt{2}.r.\sin v}{4r^3\cos^2v.+a^3\sqrt{2}.\cos v-2r^3}$ oder $a^3\sqrt{2}=m^3$ gesetzt, so ist:

$$\frac{dr}{dv}=\frac{2r^4.\cos v.\sin v+m^3.r\sin v}{4r^3.\cos^2v+m^3.\cos v-2r^3}$$

Durch 2 . cos v dividirt: $$\frac{dr}{dv}=\frac{r^4 . \sin v+\frac{m^3}{2} . r . \operatorname{tang} v}{2r^3 . \cos v+\frac{m^3}{2}-r^3 . \sec . v.}$$

Dann ist: $$\operatorname{tang}\mu=\frac{r}{\frac{dr}{dv}}=r . \frac{2r^3 . \cos v+\frac{m^3}{2}-r^3 . \sec v}{r .^4 \sin v+\frac{m^3}{2} . r . \operatorname{tang} v}.$$

Für die Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale bekommt man zur Construction wenig geeignete Ausdrücke.

Krümmungskreis und Evolute.

Die Krümmung einer Curve wird ausgedrückt durch einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt zweier unendlich naher Normalen ist. Der Radius des Krümmungskreises ist:

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes:

$$\alpha=x-\frac{dy}{dx} . \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{und} \quad \beta=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

Nun ist: $$\frac{dy}{dx}=-\frac{a^3+3x^2y+y^3}{a^3+3xy^2+x^3} \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{6xy[(a^3+3xy^2+x^3)^2+(a^3+3x^2y+y^3)^2]-6(x^2+y^2)(a^3+3x^2y+y^3)(a^3+3xy^2+x)}{(a^3+3xy^2+x^3)^3}$$

Also ist:

$$R=-\frac{\left[1+\left(\frac{a^3+3x^2y+y^3}{a^3+3xy^2+x^3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} . (a^3+3xy^2+x^3)^3}{6xy[(a^3+3xy^2+x^3)^2+(a^3+3x^2y+y^3)^2]-6(x^2+y^2)(a^3+3xy^2+x^3)(a^3+3xy^2+y^3)}$$

$$R=-\frac{[(a^3+3xy^2+x^3)^2+(a^3+3x^2y+y^3)^2] . \sqrt{(a^3+3xy^2+x^3)^2+(a^3+3x^2y+y^3)^2}}{6xy[(a^3+3xy^2+x^3)^2+(a^3+3x^2y+y^3)^2]-6(x^2+y^2)(a^3+3xy^2+x^3)(a^3+3x^2y+y^3).}$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind:

$$\alpha=x-\frac{a^3+3x^2y+y^3}{a^3+3xy^2+x^3}\cdot\frac{\left[1+\left(\frac{a^3+3x^2y+y^3}{a^3+3xy^2+x^3}\right)^2\right](a^3+3xy^2+x^3)^3}{6xy[(a^3+3x^2y+y^3)^2+(a^3+3xy^2+x^3)^2]-6(x^2+y^2)(a^3+3x^2y+y^3)(a^3+3xy^2+x^3)}$$

$$\alpha=x-\frac{(a^3+{}^3xy^2+x^3)[(a^3+3xy^2+x^3)^2+(a^3+3x^2y+y^3)^2]}{6xy[(a^3+3x^2y+y^3)^2+(a^3+3xy^2+x^3)^2]-6(x^2+y^2)(a^3+3x^2y+y^3)(a^3+3xy^2+x^3)}$$

$$\beta=y+\frac{\left[1+\left(\frac{a^3+3x^2y+y^3}{a^3+3xy^2+x^3}\right)^2\right](a^3+xy^2+x^3)^3}{6xy\ [(a^3+3x^3y+y^3)^2+(a^3+3xy^2+x^3)^2]-6(x^2+y^2)(a^3+3x^2y+y^3)(a^3+3xy^2+x^3)}$$

$$\beta=y+\frac{(a^3+3xy^2+x^3).[(a^3+3xy^2+x^3)^2+(a^3+3x^2y+y^3)^2]}{6xy\ [(a^3+3x^2y+y^3)^2+(a^3+3xy^2+x^3)^2]-6(x^2+y^2)(a^3+3x^2y+y^3)(a^3+3xy^2+x^3)}$$

Eine Gleichung der Evolute lässt sich daraus nicht ableiten.

Verlegt man das Coordinatensystem so, dass der Anfangspunkt derselbe bleibt, die neuen Coordinatenachsen dagegen mit den alten einen Winkel von 45° bilden, so wird die Gleichung der Curve einfacher und die Discussion in mancher Beziehung leichter. Die neuen Coordinaten sind nun, wenn die neue x-Achse mit der alten den Winkel β bildet:

$$x=\cos\beta\,.\,x,-\sin\beta\,.\,y,$$
$$y=\sin\beta\,.\,x,+\cos\beta\,.\,y,$$

Da aber $\beta=45°$ ist, so ist: $\sin\beta=\cos\beta$, also:

$$x=\sin\beta\,(x,-y,)$$
$$y=\sin\beta\,(x,+y,).$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung der Curve: $a^3(x+y)+xy(x^2+y^2)=a^4$ ein, so ist: $a^3[\sin\beta(x,-y,+x,+y,)]+\sin^2\beta(x,-y,)(x,+y,)\,.\,\sin^2\beta\,[(x,-y,)^2+(x,+y,)^2]=a^4$

$$a^3\,.\,\sin\beta\,.\,2x,+\sin^2\beta\,(x,^2-y,^2)\,.\,\sin^2\beta\,(2x,^2+2y,^2)=a^4$$
$$2a^3\,.\,\sin\beta\,.\,x,+2\,.\,\sin^4\beta\,(x,^4-y,^4)=a^4.$$

Aber $\sin\beta=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, also $a^3.\sqrt{2}\,.\,x,+\frac{1}{2}x,^4-\frac{1}{2}y,^4=a^4$,
oder x und y statt x, und y, wieder eingeführt: $y^4-x^4-2a^3\sqrt{2}\,.\,x+2a^4=0$, also:

$$y=\pm\sqrt[4]{x^4+2a^3\sqrt{2}x-2a^4}$$

$$y=\pm\sqrt[4]{x^4+2{,}828a^3x-2a^4}.$$

Dieser Ausdruck ist reell, so lange $x^4+2{,}828a^3x>2a^4$ ist, oder $a=1$ gesetzt, so lange $x^4+2{,}828x>2$ ist.

Löset man diese Gleichung auf, so findet man: $x=0{,}646$ und $x=-1{,}663$. Für alle

Werthe von x also, welche kleiner als 0,646 und —1,663 sind, ist y imaginär. Jede reine biquadratische Gleichung hat nun entweder zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln, oder vier imaginäre Wurzeln. Für alle Werthe von x zwischen —1,663 und 0,646 erhält man 4 imaginäre Wurzeln, für alle Werthe von $x > 0{,}646$ und $> -1{,}663$ erhält man zwei reelle Werthe, welche einander gleich und entgegengesetzt sind.

Die Gleichung der Curve: $y^4 - x^4 - 2a^3\sqrt{2}\,.\,x + 2a^4 = 0$ lässt sich noch vereinfachen. Setzt man nämlich $a\sqrt{2} = b$, so ist $a = \frac{b}{\sqrt{2}}$, also $a^3 = \frac{b^3}{2\sqrt{2}}$ und $2a^3\sqrt{2} = b^3$ und $2a^4 = \frac{b^4}{2}$, also heisst die Gleichung: $y^4 - x^4 - b^3x + \frac{b^4}{2} = 0$ oder $y = \pm\sqrt[4]{x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2}}$.

Soll dieser Ausdruck reell sein, so muss $x^4 + b^3x > \frac{b^4}{2}$ sein, oder:

$$x > 0{,}457b \text{ und } x > -1{,}129\,b.$$

Da nur gerade Potenzen von y vorkommen, so sind die im I. und IV. und die im II. und III. Quadranten gelegenen Curvenzweige gleich. Die x-Achse ist also der Durchmesser der Curve. Vgl. Taf. II.

Die erste Form der Gleichung: $y = \pm\sqrt[4]{x^4 + 2a^3\sqrt{2}\,.\,x - 2a^4}$ erlaubt eine einfache Construction. Formt man die Gleichung um, so ist:

$$y^2 = \pm x\,.\sqrt{x^2 + \frac{2a^3\sqrt{2}}{x} - \frac{2a^4}{x^2}}$$

$$y^2 = \pm x\,.\sqrt{x^2 + \frac{2\,a^2}{x}\,.\left(a\sqrt{2} - \frac{a^2}{x}\right)}$$

Es sei nun $OA = OB = a$ und $OK = x$; man ziehe AB (Taf. IV, Fig. 1), so ist $AB = a\sqrt{2}$. Nun verbinde man K mit B und errichte in B die Senkrechte BC, dann ist $OC = \frac{a^2}{x}$ und $OD = 2.OC = \frac{2a^2}{x}$. Trägt man ferner von C auf CK das Stück $CE = AB$ ab, so ist $OE = CE - OC = a\sqrt{2} - \frac{a^2}{x}$. Nun beschreibe man über DE einen Kreis, der die y-Achse in F schneidet, dann ist $OF^2 = \frac{2a^2}{x}\left(a\sqrt{2} - \frac{a^2}{x}\right)$. Verbindet man nun F mit K, so ist: $FK = \sqrt{x^2 + \frac{2a^2}{x}\left(a\sqrt{2} - \frac{a^2}{x}\right)}$. Beschreibt man noch, nachdem $KG = KF$ gemacht ist, über KG einen Kreis, der die y-Achse im Punkte H schneidet, so ist: $KH^2 = x.\sqrt{x^2 + \frac{2a^2}{x}\left(a\sqrt{2} - \frac{a^2}{x}\right)}$ Man trage also auf der im Punkte K errichteten Senkrechten KH nach beiden Seiten hin ab, so sind M und N Punkte der Curve.

Die zweite Form der Gleichung: $y^4 = x^4 + b^3 x - \frac{b^4}{2}$ lässt eine Construction mit Hülfe zweier andern Curven zu. Die Gleichung lässt sich nämlich in zwei neue Gleichungen zerlegen, von denen die eine einem Kegelschnitte, die andere einer hyperbolischen Curve angehört. Formt man die Gleichung um in: $y^4 = \left(\frac{x^3}{b^2} + b - \frac{b^2}{2x}\right) . b^2 . x$ und zerlegt diesen Ausdruck in zwei Gleichungen, indem wir eine neue Variable ξ einführen, so ist:

$$\text{I. } y^2 = \left(\frac{x^3}{b^2} + b - \frac{b^2}{2x}\right) . \xi$$

$$\text{II. } y^2 = \frac{b^2 x}{\xi}.$$

Für ein bestimmtes x kann man die beiden Curven construiren und da durch Multiplication der beiden Gleichungen die ursprüngliche wieder entsteht, so gibt der Durchschnittspunkt der beiden Hülfscurven einen Punkt unserer Curve.

Die Gleichung I: $y^2 = \left(\frac{x^3}{b^2} + b - \frac{b^2}{2x}\right) . \xi$ stellt eine Parabel dar, deren Anfangspunkt mit dem des Coordinatensystems zusammenfällt; denn setzt man $\frac{x^3}{b^2} = c$ und $\frac{b^2}{2x} = d$, so ist $y^2 = (c + b - d) . \xi$ oder $y^2 = e . \xi$. Für $\xi = o$ ist $y = o$. Um die Parabel zu construiren, sei (Taf. IV, Fig. 2) $OA = x$, $OC = OD = b$. Man ziehe DA und errichte in A und D auf DA die Senkrechten AE und DG und in E auf AE die Senkrechte EF, so ist $OF = \frac{x^3}{b^2}$, also $FC = \frac{x^3}{b^2} + b$ und $OG = \frac{b^2}{x}$, also $\frac{OG}{2} = OH = \frac{b^2}{2x}$. Trägt man nun $CK = OH$ von C aus auf CF ab, so ist $FK = \frac{x^3}{b^2} + b - \frac{b^2}{2x} = e$. Man mache nun $OL = FK$, beschreibe über OL einen Halbkreis, errichte in beliebigen Punkten M, M′, M″, M‴, K, C, A... Senkrechte auf OL, welche den Kreis in den Punkten N, N′, N″... schneiden und trage die Stücke ON, ON′, ON″, ON‴... von M, M′, M″.... auf den Senkrechten ab, so sind die Punkte P, P′, P″, P‴.... Punkte der Parabel.

Die zweite Gleichung $y^2 = \frac{b^2 x}{\xi}$ stellt eine hyperbolische Curve dar, welche aus vier symetrischen Zweigen besteht, die in den 4 Quadranten liegen und sich an die Coordinaten als Asymptoten anlehnen. Zu unserer Construction genügt der im I. Quadranten liegende Zweig. Um diesen zu construiren, verbinde man die Punkte M, M′, M″, C, A, M‴ ... mit D, errichte im Endpunkte D auf diesen Verbindungslinien Senkrechte, welche die x-Achse in den Punkten Q, Q′, Q″, Q‴ ... schneiden; beschreibt man nun über QA, Q′A, Q″A, Q‴A ... Kreise, welche die y-Achse in den Punkten R, R′, R″, R‴, ... schneiden und

trägt die Längen OR, OR′, OR″, OR‴ ... auf den in den Punkten M, M′, M″ .... errichteten Senkrechten ab, so sind die Punkte S, S′, S″, S‴ .... Punkte der hyperbolischen Curve. Verbindet man die Punkte dieser beiden Hülfscurven mit einander, so gibt der Durchschnittspunkt T derselben einen Punkt der Curve für die Abscisse x = OA. Macht man also AU = TV, so ist U ein Punkt der Curve. Ebenso lässt sich für den negativen Zweig der Curve die Construction ausführen.

Asymptoten.

Bei der Bestimmung der Asymptoten für die ursprüngliche Form der Curve fanden wir, dass die Asymptoten durch den Anfangspunkt gingen und die Quadranten halbirten. Nachdem das Coordinatensystem um 45° gedreht worden ist, müssen also die Asymptoten durch die ursprünglichen x- und y-Achsen dargestellt werden.

Die Gleichung der Curve ist:

$$y^4 = x^4 + b^3 x - \frac{b^4}{2}$$

Die Gleichung der Asymptote sei:

$$y = m x + n, \quad \text{wobei dann} \quad m = \lim . \frac{y}{x}$$

und $n = \lim (y - mx)$.

Nun ist $y = \pm \sqrt[4]{x^4 + b^3 x - \frac{b^4}{2}}$

also: $\frac{y}{x} = \pm \sqrt[4]{1 + \frac{b^3}{x^3} - \frac{b^4}{2x^4}} \quad \lim \frac{y}{x} = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$

Der Richtungscoefficient der Asymptote tang $\lambda = \pm 1$.

Ferner ist $n = \lim (y - mx)$ oder da $m = 1$, so ist $n = \lim (y - x)$, also

$$n = \lim \left(\sqrt[4]{x^4 + b^3 x - \frac{b^4}{2}} - x\right)$$

Nun ist aber: $\sqrt[4]{x^4 + b^3 x - \frac{b^4}{2}} = \left(x^4 + b^3 x - \frac{b^4}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[x^4 + \left(b^3 x - \frac{b^4}{2}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$.

Entwickeln wir dies nach dem binamischen Lehrsatze, so ist:

$$\left[x^4 + \left(b^3 x - \frac{b^4}{2}\right)\right]^{\frac{1}{4}} = x^{4 \cdot \frac{1}{4}} + \frac{1/4}{1}\left(x^4\right)^{1/4 - 1} \cdot \left(b^3 x - \frac{b^4}{2}\right)$$

$$+ \frac{1/4 \cdot (1/4 - 1)}{1.\ 2}\left(x^4\right)^{\frac{1}{4} - 2} \left(b^3 x - \frac{b^4}{2}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4} - 1) \cdot (\frac{1}{4} - 2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\left(x^4\right)^{\frac{1}{4}-3} \cdot \left(b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^3+\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1).(\frac{1}{4}-2).(\frac{1}{4}-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \cdot \left(x^4\right)^{\frac{1}{4}-4} \left(b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^3+\ldots\ldots$$

$$=x+\tfrac{1}{4}x^{-3}b^3x-\tfrac{1}{8}x^{-3}b^4-\tfrac{3}{32}x^{-7}b^6x^2+\tfrac{3}{32}x^{-7}b^7x-\tfrac{3}{128}x^{-7}b^8+\tfrac{7}{128}x^{-11}b^9x^3$$

$$-\tfrac{21}{256}x^{-11}b^{16}x^2+\tfrac{21}{512}x^{-11}b^{11}x-\tfrac{7}{1024}x^{-11}b^{12}\ldots.$$

$$=x+\tfrac{1}{4}\frac{b^3}{x^2}-\tfrac{1}{8}\frac{b^4}{x^3}-\tfrac{3}{32}\frac{b^6}{x^5}+\tfrac{3}{32}\frac{b^7}{x^6}-\tfrac{3}{128}\frac{b^8}{x^7}+\tfrac{7}{128}\frac{b^9}{x^8}-\tfrac{21}{256}\frac{b^{16}}{x^9}+\tfrac{21}{512}\frac{b^{11}}{x^{10}}-\tfrac{7}{1024}\frac{b^{12}}{x^{11}}-\ldots\ldots$$

also $n=\lim\left(x+\tfrac{1}{4}\frac{b^3}{x^2}-\tfrac{1}{8}\frac{b^4}{x^3}-\tfrac{3}{32}\frac{b^6}{x^5}+\tfrac{3}{32}\frac{b^7}{x^6}-\tfrac{3}{128}\frac{b^8}{x^7}+\ldots.-x\right)$,

Geht man nun zur Grenze über, indem man $x=\infty$ setzt, so ist $n=0$, d. h. die Asymptote geht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems; und da $m=\tan\lambda = \pm 1$ war, so halbiren die Asymptoten die 4 Quadranten, sind also die ursprünglichen x- und y-Achsen.

Maxima und Minima der Curve: $y^4-x^4-b^3x+\frac{b^4}{2}=0.$

Die erste Ableitung der Gleichung ist: $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3+b^3}{4y^3}$.

Soll nun ein Maximum oder Minimum stattfinden, so muss $4x^3+b^3=0$ werden; oder es muss sein: $x=-\sqrt[3]{\frac{b^3}{4}}=-\frac{b}{\sqrt[3]{4}}=-\frac{b}{1{,}5874}=-0{,}6296.$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung der Curve $y=\pm\sqrt[4]{x^4+b^3x-\frac{b^4}{2}}$ ein, so ist: $y=\pm\sqrt[4]{0{,}156\,b^4-0{,}629\,b^4-0{,}5b^4}$ oder $y=\pm\sqrt[4]{-0{,}973\,b^4}$.

Der Werth von y ist imaginär; es existirt also für den positiven Zweig der Curve kein Maximum oder Minimum. Für den negativen Curvenzweig ist x negativ, also $y^4-x^4+b^3x+\frac{b^4}{2}=0$; dann ist: $\frac{dy}{dx}=-\frac{-4x^3+b^3}{4y^3}$.

Es wird dann $4x^3-b^3=0$ für den Werth $x=0{,}629$ b. Diesen Werth in die Gleichung von y eingesetzt, gibt: $y=\sqrt[4]{0{,}156\,b^4-0{,}629\,b^4-0{,}56^4}=\sqrt[4]{-0{,}973\,b^4}$.

Der Werth von y ist also ebenfalls imaginär, es findet auch für den negativen Curvenzweig kein Maximum oder Minimum statt.

Convexität, Concavität und Inflexionspunkte der Curve:

$$y^4 - x^4 - b^3x + \frac{b^4}{2} = o.$$

Es ist: $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + b^3}{4y^3}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12x^2 - 12y^2.\left(\frac{4x^3+b^3}{4y^3}\right)^2}{4y^3} = \frac{3x^2 - 3y^2.\left(\frac{4x^3+b^3}{4y^3}\right)^2}{y^3}$

$$= \frac{48x^2y^6 - 48x^6y^2 - 24b^3x^3y^2 - 3b^6y^2}{16y^9} = \frac{48x^2y^4 - 48x^6 - 24b^3x^3 - 3b^6}{16y^7}$$

Setzt man hierin für y seinen Werth: $y = \sqrt[4]{x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2}}$, so ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{48x^6 + 48b^3x^3 - 24b^4x^2 - 48x^6 - 24b^3x^3 - 3b^6}{16\left(x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2}\right).\sqrt[4]{\left(x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2}\right)^3}} = \frac{24b^3x^3 - 24b^4x^2 - 3b^6}{16\left(x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2}\right)\sqrt[4]{\left(x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2}\right)^3}}$$

Soll nun ein Inflexionspunkt stattfinden, so muss der Zähler: $24b^3x^3 - 24b^4x^2 - 3b^6 = o$ werden, oder es muss sein: $x^3 - bx^2 - \frac{1}{8}b^3 = o$, oder $b = 1$ gesetzt: $x^3 - x^2 - \frac{1}{8} = o$.

Dieser Gleichung genügt der Werth $x = 1,102$. Also hat die Curve einen Wendepunkt für die Abscisse $x = 1,102b$. Diesem Werthe von x entspricht:

$$y = \pm \sqrt[4]{1,102^4 + 1,102 - 0,5} = \pm \sqrt[4]{2,1751} \text{ oder } y = \pm 1,215\,b.$$

Für alle Werthe von $x < 1,102$ ist die zweite Ableitung negativ, also die Curve concav; für alle Werthe von $x > 1,102$ ist die zweite Ableitung positiv, also die Curve convex. Da die Gleichung $x^3 - x^2 - \frac{1}{8} = o$ nur eine reelle Wurzel hat, so hat die Curve auf der positiven Seite nur einen Wendepunkt. Für den negativen Curvenzweig ist x negativ, also muss sein: $x^3 + x^2 + \frac{1}{8} = o$.

Dieser Gleichung entspricht die eine reelle Wurzel $x = -0,123$, für welchen Werth aber keine Curve existirt. Der negative Curvenzweig hat also keinen Inflexionspunkt.

Aus den beiden gefundenen Ordinaten des Inflexionspunktes kann man nun leicht die Ordinaten des Inflexionspunktes der ursprünglichen Curve berechnen. Aus der Gleichung: $y^4 - x^4 - b^3x + \frac{b^4}{2} = o$ folgte für den Wendepunkt die Abscisse $x = 1,102$. Da die Werthe der Gleichung: $y^4 - x^4 - 2a^3\sqrt{2}.\,x + 2a^4 = o$, aus welcher die erstere Gleichung entstand, indem wir $a\sqrt{2} = b$ setzten, $\sqrt{2}$ mal so gross sind, als die Werthe jener Gleichung, so entspricht dieser Gleichung ein Werth von $x = 1,102.\sqrt{2}$. Da ferner die der Gleichung: $y^4 - x^4 - 2a^3\sqrt{2}x + 2a^4 = o$ entsprechende Curve zur x-Achse diejenige Linie hat, welche gegen die Ordinaten-Achsen der ursprünglichen Curve: $a^3(x+y) + xy(x^2+y^2) - a^4 = o$ unter einem Winkel von 45° durch den Anfangspunkt gelegt ist, so hat jeder Punkt der ursprünglichen Curve eine Abscisse, die $\sqrt{2}$ mal so gross ist als die der Curve: $y^4 - x^4 - 2a^3\sqrt{2}.\,x + 2a^4 = o$.

Wir müssen also, um die Abscisse des Inflexionspunktes für die ursprüngliche Curve zu finden, den Werth $1{,}102.\sqrt{2}$ noch mal mit $\sqrt{2}$ multipliciren, oder es ist: $x = 2.1{,}102 = 2{,}204$. Berechnet man das zu diesem x gehörige y, so findet man $y = -0{,}108$. Die Ordinaten des Inflexionspunktes der ursprünglichen Curve sind also: $x = 2{,}204$; $y = -0{,}108$.

Setzt man diese Werthe in den zweiten Differentialquotienten:

$$xy.[(1+3xy^2+x^3)^2+(1+3x^2y+y^3)^2]-(x^2+y^2)(1+3xy^2+x^3).(1+3x^2y+y^3), \text{ so ist}$$
$$-0{,}2398[(1+6{,}612.0{,}01188+10{,}648)^2+(1-14{,}52.0{,}108-0{,}00129)^2]$$
$$+(4{,}84+0{,}01188).(1+6{,}612.0{,}01188+10{,}648).(1-14{,}52.0{,}108-0{,}00129)$$
$$=-0{,}2398.(11{,}726^2+0{,}584^2)+4{,}8518.11{,}7267.0{,}584=-0{,}298.138{,}341+56{,}871.0{,}584$$
$$=-33{,}063+33{,}191,$$

also sehr nahe $= 0$. Da die Curve symetrisch ist, so findet auch ein Wendepunkt statt für $x = -0{,}108$ und $y = 2{,}204$. Für alle Werthe von $x < 2{,}204$ wird die zweite Ableitung negativ, also ist die Curve concav; für alle Werthe von $x > 2{,}204$ ist sie positiv, also die Curve convex.

Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Curve.

Die Gleichung der Tangente ist: $y - y_{,} = \frac{dy}{dx}(x - x_{,})$.

Die Gleichung der Curve ist: $y^4 - x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2} = 0$, also

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3+b^3}{4y^3}$, also ist die Gleichung der Tangente für den Punkt $(x_{,}, y_{,})$

$$y - y_{,} = \frac{4x_{,}^3+b^3}{4y_{,}^3}\, x - x_{,}) \quad y = y_{,} + \frac{4x_{,}^3+b^3}{4y_{,}^3}(x - x_{,})$$

$$y = \frac{4y_{,}^4 - 4x_{,}^4 - b^3x_{,} + (4x_{,}^3+b^3)x}{4y_{,}^3}$$

Setzt man nun für $y_{,}$ seinen Werth aus der Gleichung $y_{,} = \pm\sqrt[4]{x_{,}^4+b^3x_{,}-\frac{b^4}{2}}$, so ist:

$$y = \frac{4x_{,}^4+4b^3x_{,}-2b^4-4x_{,}^4-b^3x_{,}+(4x_{,}^3+b^3)x}{\pm 4\sqrt[4]{\left(x_{,}^4+b^3x_{,}-\frac{b^4}{2}\right)^3}}$$

$$y = \frac{3b^3x_{,}-2b^4+(4x_{,}^3+b^3)x}{\pm 4\sqrt[4]{\left(x_{,}^4+b^3x_{,}-\frac{b^4}{2}\right)^3}}$$

$$y = \frac{4x_,^3 + b^3}{\pm 4 \sqrt[4]{\left(x_,^4 + b^3 x_, - \frac{b^4}{2}\right)^3}} \cdot x + \frac{3b^3 x_, - 2b^4}{\pm 4 \sqrt[4]{\left(x_,^4 + b^3 x_, - \frac{b^4}{2}\right)^3}}$$

Um nun den Punkt zu finden, wo die Tangente die y-Achse schneidet, setze man $x = 0$, dann ist:

$$y = \frac{3b^3 x_, - 2b^4}{\pm 4 \sqrt[4]{\left(x_,^4 + b^3 x_, - \frac{b^4}{2}\right)^3}}$$

y wird $= 0$, wenn $3b^3 x_, - 2b^4 = 0$ wird, oder wenn $x_, = \frac{2}{3}\, b$ ist, d. h. für den Punkt der Curve, welcher die Abscisse $x_, = \frac{2}{3} b$ hat, geht die Tangente durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems.

y wird ∞, wenn $x_,^4 + b^3 x_, - \frac{b^4}{2} = 0$ wird. Dies ist aber der Fall für $x_, = 0{,}457 b$. Für den Punkt der Curve also, welcher die Abscisse $x_, = 0{,}457 b$ hat, d. h. da, wo die Curve die x-Achse schneidet, steht die Tangente senkrecht auf der x-Achse.

Die Gleichung der Normale ist: $y - y_, = - \frac{4y_,^3}{4x_,^3 + b^3}\, x - x_,)$

$$y = - \frac{4y'^3}{4x_,^3 + b^3}\, x + y_, + \frac{4y_,^3}{4x_,^3 + b^3} \cdot x_,$$

$$y = - \frac{4y'^3}{4x_,^3 + b^3}\, x + \frac{4x_,^3 y_, + 4y_,^3 x_, + b.^3 y_,}{4x_,^3 + b^3}$$

Die Gleichung der Subtangente ist: $x - x_, = \frac{4y_,^4}{4x_,^3 + b^3}$ oder

$$x = \frac{4x_,^4 + b^3 x_, + 4y_,^4}{4x_,^3 + b^3};\quad x = \frac{8x_,^4 + 5b^3 x_, - 2b^4}{4x_,^3 + b^3}$$

Für $x_, = b$ ist z. B. $x = \frac{11b^4}{5b^3} = 2\frac{1}{5}\, b.$

Die Gleichung der Subnormale ist: $x - x_, = y' \cdot \frac{4x_,^3 + b^3}{4y_,^3}$ oder $x = x_, + \frac{4x_,^3 + b^3}{4y_,^2}$.

Um die Länge der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale zu bestimmen, setze man: $T = y_, \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx_,}{dy_,}\right)^2}$, also $T = \sqrt{y_,^2 + y_,^2 \cdot \left(\frac{4y_,^3}{4x_,^3 + b^3}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{(4x_,^3 + b^3)^2 \cdot y_,^2 + 16y_,^8}{16x_,^6 + 8x_,^3 b^3 + b^6}};$$

$$N = y_, \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy_,}{dx_,}\right)^2}, \quad \text{also} \quad N = \sqrt{\frac{16y_,^8 + y_,^2 (4x_,^3 + b^3)^2}{16y_,^6}}$$

$$St = y_, \cdot \frac{dx_,}{dy_,} = y_, \cdot \frac{4y_,^3}{4x_,^3 + b^3} = \frac{4y_,^4}{4x_,^3 + b^3};$$

$$Sn = y_, \cdot \frac{dy_,}{dx_,} = y_, \cdot \frac{4x_,^3 + b^3}{4y_,^3} = \frac{4x_,^3 + b^3}{4y'^2};$$

Am besten geeignet für die Construction ist der Ausdruck für die Subnormale. Es ist nämlich:

$$Sn = \frac{4x_,^3 + b^3}{4y_,^2} = \frac{x_,^3}{y_,^2} + \frac{b^3}{(2y_,)^2}$$

Es sei nun (Taf. V Fig. 1) P ein Punkt der Curve, also $OA = x_,$ und $AP = y_{,,}$ ferner $OC = CD = y_,$ und $OB = OG = b$. Man ziehe CA und errichte in A auf CA die Senkrechte AE und in E auf AE die Senkrechte EF, so ist $OF = \frac{x_,^3}{y_,^2}$. Ferner verbinde man D mit G, und errichte in D auf DG die Senkrechte GH und in H auf GH die Senkrechte HK, so ist $OK = \frac{b^3}{(2y_,)^2}$ also ist $FK = FO + OK = \frac{x_,^3}{y_,^2} + \frac{b^3}{(2y_,)^2}$. Trägt man nun das Stück FK von A aus nach rechts ab, so ist AL die Subnormale. Hieraus lässt sich die Normale, Tangente und Subtangente leicht finden, indem man L mit P verbindet und im Punkte P auf LP eine Senkrechte errichtet.

Krümmungskreis und Evolute.

Es ist: $R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ der Radius des Krümmungskreises und

$$\alpha = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \quad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

die Coordinaten des Mittelpunktes.

Nun ist: $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + b^3}{4y^3}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24b^3x^3 - 24b^4x^2 - 3b^6}{16y^7}$; also ist:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{4x^3 + b^3}{4y^3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} . 16y^7}{24b^3x^3 - 24b^4x^2 - 3b^6} = \frac{\left(\frac{16y^6 + 16x^6 + 8b^3x^3 + b^6}{16y^6}\right)^{\frac{3}{2}} . 16y^7}{24b^3x^3 - 24b^4x^2 - 36^6}$$

$$= \frac{(16y^6 + 16x^6 + 8b^3x^3 + b^6)^{\frac{3}{2}}}{4y^2 . (24b^3x^3 - 24b^4x^2 - 3b^6}$$

$$\alpha = x - \frac{4x^3+b^3}{4y^3} \cdot \frac{(16y^6+16x^6+8b^3x^3+b^6)\,.\,y}{24b^3x^3-24b^4x^2-3b^6}$$

$$= \frac{4xy.^2(24b^3x^3-24b^4x^2-3b^6)-(4x^3+b^3)(16y^6+16x^6+8b^3x^3+b^6)}{4y.^2(24b^3x^3-24b^4x^2-3b^6)}$$

$$\beta = y + \frac{(16y^6+16x^6+8b^3x^3+b^6)\,y}{24b^3x^3-24b^4x^2-3b^6} = \frac{y\,(24b^3x^3-24b^4x^2-3b^6+16y^6+16x^6+8b^3x^3+b^6)}{24b^3x^3-24b^4x^2-3b^6}$$

$$= \frac{y.(16x^6+16y^6+32b^3x^3-24b^4x^2-2b^6)}{24b^3x^3-24b^4x^2-3b^6}.$$

Zur Berechnung der Evolute sind diese Ausdrücke nicht geeignet; einfacher gestaltet sich die Berechnung derselben, wenn man die Curve auf die y-Achse bezieht, dann ist die Gleichung derselben: $x^4-y^4-b^3y+\frac{b^4}{2}=o$, also $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3}{4y^3+b^3}$ und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12x^2-12y^2\cdot\left(\frac{4x^3}{4y^3+b^3}\right)^2}{4y^3+b^3} = \frac{192y^6x^2+96b^3x^2y^3+12b^6x^2-192x^6y^2}{(4y^3+b^3)^3}$$

$$= \frac{192y^6x^2+96b^3x^2y^3+12b^6x^2-192x^2y^6-192b^3x^2y^3+96b^4x^2y^2}{(4y^3+b^3)^3} = \frac{96b^4x^2y^2-96b^3x^2y^3+12b^6x^2}{(4y^3+b^3)^3}.$$

Zur Berechnung der Evolute dienen folgende drei Gleichungen:

I. $x^4-y^4-b^3y+\frac{b^4}{2}=o$. II. $(y-\beta)\cdot\frac{dy}{dx}+(x-\alpha)=o$. III. $(y-\beta).\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=o$.

Es ist also: $(y-\beta)\cdot\frac{4x^3}{4y^3+b^3}+(x-\alpha)=o$ und

$$(y-\beta)\cdot\frac{96b^4x^2y^2-96b^3x^2y^3+12b^6x^2}{(4y^3+b^3)^3}+\left(\frac{4x^3}{4y^3+b^3}\right)^2+1=o$$

$$(y-\beta).(96b^4x^2y^2-96b^3x^2y^3+12b^6x^2)+16x^6(4y^3+b^3)+(4y^3+b^3)^3=o.$$

$$(y-\beta).(24b^4y^2-24b^3y^3+3b^6).4x^2+(4y^4+4b^3y-2b^4)(4y^3+b^3).4x^2+(4y^3+b^3)^3=o$$

$$[(y-\beta)(24b^4y^2-24b^3y^3+3b^6)+16y^7+16b^3y^4-8b^4y^3+4b^3y^4+4b^6y-2b^7].4x^2=-(4y^3+b^3)^3.$$

$$[16b^4y^3-4b^3y^4+7b^6y+16y^7-2b^7-(24b^4y^2-24b^3y^3+3b^6)\beta]\,4x^2=-(4y^3+b^3)^3.$$

$$[16y^7-16b^4y^3-4b^3y^4+7b^6y-2b^7-(24b^4y^2-24b^3y^3+3b^6).\beta.]\,4\sqrt{y^4+b^3y-\tfrac{b^4}{2}}=-(4y^3+b^3)^3.$$

Erhebt man diese Gleichung in's Quadrat, so bekommt man nach Multiplication und Reduction eine Gleichung 14ten Grades, aus welcher sich y nicht nach β auflösen lässt,

selbst für den Fall, dass $b=1$ gesetzt wird. Legt man die Gleichung der Curve in Bezug auf die x-Achse zu Grunde, so bekommt man eine Gleichung eines noch höheren Grades. Die Berechnung der Evolute ist daher unmöglich.

Verlauf der Curve.

Die Curve, deren Gleichung $a^3(x+y)+xy(x^2+y^2)=a^4$ ist, besteht aus zwei Zweigen, einem positiven und einem negativen. Beide kommen aus der Unendlichkeit, haben die Coordinatenachsen als Asymtoten und liegen symetrisch zu beiden Seiten der Halbirungslinie des I. und III. Quadranten. Der erste Zweig kommt aus der Unendlichkeit im II. Quadranten, wo er sich an die y-Achse als Asymptote anlehnt, entfernt sich allmälig von ihr, wobei er derselben seine convexe Seite zukehrt. Bei $x=-0{,}108\,a$, $y=2{,}204\,a$ hat er einen Inflexionspunkt, wendet also von nun an der y-Achse seine concave Seite zu und erreicht bei $x=-0{,}1144a$, $y=1{,}686a$ sein Minimum, nähert sich dann der y-Achse wieder und durchschneidet dieselbe in der Entfernung a vom Anfangspunkte, dann durchläuft er den ersten Quadranten, durchschneidet die x-Achse in der Entfernung a vom Anfangspunkte und beschreibt in Bezug auf die x-Achse denselben Weg, wie in Bezug auf die y-Achse. Der zweite Zweig liegt ganz im III. Quadranten und kehrt fortwährend beiden Achsen seine convexe Seite zu. Er lehnt sich an beide Achsen als Asymptoten an und verläuft nach beiden Seiten in die Unendlichkeit.

Rectification und Schwerpunktsbestimmung der Curve: $y^4-x^4-b^3x+\frac{b^4}{2}=0$.

Es ist: $ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ also: $s=\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Nun ist: $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3+b^3}{4y^3}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{16x^6+8b^3x^3+b^6}{16y^6}$,

also ist:

$$s=\int dx.\sqrt{1+\frac{16x^6+8b^3x^3+b^6}{16\sqrt{\left(x^4+b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^3}}}.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind: $sy_{,}=\int y.ds$; $sx_{,}=\int x.ds$; also:

$$sy_{,}=\int\sqrt[4]{\left(x^4+b^3x-\frac{b^4}{2}\right)}.dx.\sqrt{1+\frac{16x^6+8b^3x^3+b^6}{16\sqrt{\left(x^4+b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^3}}}$$

$$sx_{,}=\int x.dx.\sqrt{1+\frac{16x^6+8b^3x^3+b^6}{16(x^4+b^3x-\frac{b^4}{2})^{\frac{3}{2}}}}$$

Diese Integrale sind nur in unendlichen Reihen lösbar, welche hier zu verwickelt werden, um sich zur Berechnung zu eignen. Einfacher gestalten sich die Integrale für die Flächen.

Die Formel ist: $\lambda = \int . y . dx$; also ist:

$$\lambda = \int \sqrt[4]{x^4 + b^3 x - \frac{b^4}{2}} . dx = \int \left(x^4 + b^3 - \frac{b^4}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot dx = \int x \left(1 + \frac{b^3}{x^3} - \frac{b^4}{2x^4}\right)^{\frac{1}{4}} . dx.$$

Nun ist aber:

$$\left(1 + \frac{b^3}{x^3} - \frac{b^4}{2x^4}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 + \tfrac{1}{4} . \frac{b^3}{x^3} - \tfrac{1}{8} . \frac{b^4}{x^4} - \tfrac{3}{32} \cdot \frac{b^6}{x^6} + \tfrac{3}{32} . \frac{b^7}{x^7} - \tfrac{3}{128} . \frac{b^8}{x^8} + \tfrac{7}{128} \frac{b^9}{x^9} - \tfrac{21}{256} \frac{b^{10}}{x^{10}} + \ldots$$

$$\lambda = \int x . \left(1 + \tfrac{1}{4} . \frac{b^3}{x^3} - \tfrac{1}{8} . \frac{b^4}{x^4} - \tfrac{3}{32} . \frac{b^6}{x^6} + \tfrac{3}{32} . \frac{b^7}{x^7} - \tfrac{3}{128} . \frac{b^8}{x^8} + \tfrac{7}{128} . \frac{b^9}{x^9} - \tfrac{21}{256} . \frac{b^{10}}{x^{10}} \ldots \right) . dx$$

Die Reihe ist convergent, wenn $x > b$ ist.

$$\lambda = \int dx . \left(x + \frac{b^3}{4x^2} - \frac{b^4}{8x^3} - \frac{3b^6}{32x^5} + \frac{3b^7}{32x^6} - \frac{3b^8}{128x^7} + \frac{7b^9}{128x^8} - \ldots \right)$$

Berechnen wir die Fläche von $x = 0{,}457\,b$ bis $x = x_{,}$ so ist:

$$\lambda = \int_{x=0{,}457\,b.}^{x=x_{,}} dx . \left(x_{,} + \frac{b^3}{4x_{,}^2} - \frac{b^4}{8x_{,}^3} - \frac{3b^6}{32x_{,}^5} + \frac{3b^7}{32x_{,}^6} - \frac{3b^8}{128x_{,}^7} + \frac{7b^9}{128x^8} - \ldots \right)$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} x_{,}^2 - \frac{b^3}{4} . \frac{1}{x_{,}} + \frac{b^4}{16x_{,}^2} + \frac{3b^6}{128\,x_{,}^4} - \frac{3b^7}{160\,x_{,}^5} + \frac{b^8}{256\,x_{,}^6} - \frac{b^9}{128\,x_{,}^7} + \frac{21\,b^{10}}{8.256.x_{,}^8} \ldots$$

Setzt man z. B. $b = 1$ und $x_{,} = 2$, so ist:

$$\lambda = \tfrac{1}{2} . 4 - \frac{1}{4.2} + \frac{1}{16.4} + \frac{3}{128.16} - \frac{3}{160.32} + \frac{1}{256.64} - \frac{1}{128^2} + \frac{21}{8.256^2} \ldots$$

$$\lambda = 2 + 0{,}0156 + 0{,}0014 + 0{,}0006 + 0{,}0004 - 0{,}125 - 0{,}00042 - 0{,}00006 \ldots$$

$$\lambda = 1{,}90162 \ldots$$

Je grösser $x_{,}$ wird, desto kleiner werden die Glieder, in denen x im Nenner vorkommt, für $x_{,} = \infty$, werden sie $= 0$; dann ist also $\lambda = \frac{1}{2} x_{,}^2$. Nun ist aber der Inhalt des Dreiecks, welcher von der x-Achse, der Ordinate y und der Asymptote begrenzt wird: $I = \frac{1}{2} x . y$, oder da $x = y$ ist, so ist $I = \frac{1}{2} x^2$. Für sehr grosse x ist also $\lambda = I$ oder die von der x-Achse und der Curve begrenzte Fläche ist gleich der von der x-Achse und der Asymptote begrenzten Fläche. Da aber die Curve symetrisch zu beiden Seiten der x-Achse liegt, so ist auch die von der Curve begrenzte Fläche gleich der von den Asymptoten begrenzten Fläche. Zieht man auf beiden Seiten die Fläche der Curve ab, welche innerhalb der Asymptoten liegt, so ist die Fläche der Curve, welche ausserhalb der Asymptoten liegt, gleich der Fläche, welche

von den Asymptoten und dem innerhalb derselben fallenden Theile des Curvenzweiges begrenzt wird.

Die Coordinaten des Schwerpunktes der Fläche sind:

$\lambda y_{,}=\frac{1}{2}\int y^2.dx$ und $\lambda x_{,}=\int y.x.dx$; also: $\lambda y_{,}=\frac{1}{2}\int\left(x^4+b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot dx.$ Nun ist aber:

$$\left(x^4+b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=x^2+\tfrac{1}{2}x^{-2}\left(b^3x-\frac{b^4}{2}\right)-\tfrac{1}{8}x^{-6}\left(b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^2$$

$$+\frac{3}{48}x^{-10}\left(b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^3-\frac{15}{64}x^{-14}\left(b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^4+\ldots.$$

$$=x^2+\frac{b^3}{2x}-\frac{b^4}{4x^2}-\frac{b^6}{8x^4}+\frac{b^7}{8x^5}-\frac{b^8}{32x^6}+\frac{3b^9}{48x^7}-\frac{9b^{10}}{96x^8}+\frac{9b^{11}}{192x^9}-\frac{3b^{12}}{384x^{10}}\ldots.$$

$$\lambda y_{,}=\frac{1}{2}\int_{x=0,457b}^{x=x_{,}}dx.\left(x_{,}^2+\frac{b^3}{2x_{,}}-\frac{b^4}{4x_{,}^2}-\frac{b^6}{8x_{,}^4}+\frac{b^7}{8x_{,}^5}-\frac{b^8}{32x_{,}^6}+\frac{b^9}{16x_{,}^7}-\frac{3b^{10}}{32x_{,}^8}+\frac{3b^{11}}{64x_{,}^9}-\frac{b^{12}}{128x_{,}^{10}}\ldots.\right)$$

$$=\frac{1}{6}x_{,}^3+\frac{b^3}{4}.lx+\frac{b^4}{8x_{,}}+\frac{b^6}{48x_{,}^3}-\frac{b^7}{64x_{,}^4}+\frac{b^8}{320x_{,}^5}-\frac{b^9}{192x_{,}^6}+\frac{3b^{10}}{448x_{,}^7}-\frac{3b^{11}}{1024x_{,}^8}\ldots.$$

Für $b=1$ und $x_{,}=2$ ist also:

$$\lambda y_{,}=\tfrac{4}{3}+0,7489+0,0625+0,002604-0,000976+0,000097-0,000081+0,000052\ldots.$$

$$\lambda y_{,}=2,148318.., \text{ also } y_{,}=\frac{2,148318}{1,90162}=1,128.$$

$$\lambda x_{,}=\int.y.x.dx=\int x.\left(x^4+b^3x-\frac{b^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.dx$$

$$\lambda x_{,}=\int_{x=0,457}^{x=x_{,}}x_{,}^2+\frac{b^3}{4x_{,}}-\frac{b^4}{8x_{,}^2}-\frac{3b^6}{32x_{,}^4}+\frac{3b^7}{32x_{,}^5}-\frac{3b^8}{128x_{,}^6}+\frac{7b^9}{128x_{,}^7}-\frac{21b^{10}}{256x^8}+\frac{21b^{11}}{256x_{,}^9}\ldots.$$

$$\lambda x_{,}=\tfrac{1}{3}x_{,}^3+\frac{b^3}{4}.lx+\frac{b^4}{8x_{,}}+\frac{b^6}{32x_{,}^3}-\frac{3b^7}{128x_{,}^4}+\frac{3b^8}{640x_{,}^5}-\frac{7b^9}{768x_{,}^6}+\frac{3b^{10}}{256x_{,}^8}-\ldots.$$

Für $b=1$ und $x_{,}=2$ ist also:

$$\lambda x_{,}=2,66666+0,7489+0,0625+0,003906-0,001464+0,000146-0,000140+\ldots$$

$$\lambda x_{,}=3,4204, \text{ also } x_{,}=\frac{3,4204}{1,90162}=1,79.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind also: $x_{,}=1,79$ und $y_{,}=1,128$.

Lässt man die Curve um die x-Achse rotiren, so ist die Oberfläche des Rotationskörpers:

$$O = 2\pi . \int y . dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$O = 2\pi \int dx . \sqrt[4]{x^4 + b^3 x - \frac{b^4}{2}} . \sqrt{1 + \frac{16x^6 + 8b^3x^3 + b^6}{16\sqrt[4]{\left(x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2}\right)^3}}} .$$

Der Inhalt des Rotationskörpers ist:

$$I = \pi \int y^2 . dx$$

$$= \pi . \int \left(x^4 + b^3x - \frac{b^4}{2}\right)^{\frac{2}{4}} . dx.$$

Man findet also Integrale, die sich entweder nicht entwickeln lassen, oder schon bekannt sind.

Berichtigung:

Seite 13, Z. 6 und 7 ist statt y' und x' zu setzen: $y_,$ und $x_,$.